

Cálculo I

Limites

Motivação para o estudo dos limites

- 1 – Inclinação da reta tangente;

  - O que é reta tangente a uma curva

- 2 – Velocidade média

  X

  Velocidade Instantânea

1 – Inclinação da reta tangente

- O limite pode calcular a inclinação da reta tangente;
- Na verdade definimos a condição de tangência usando limites;
- A tangente à curva em P é a reta que atravessa P cujo coeficiente angular é o limite dos coeficientes angulares das secantes quando Q se aproxima de P de ambos os lados.

- Gráfico

Exemplo 1

- Determine o coeficiente angular da parábola

  $y = x^2$ no ponto P(2,4). Escreva uma equação para a tangente à parábola nesse ponto.

2 – Velocidade média X Velocidade instantânea

- Grandezas instantâneas, como a velocidade, por exemplo, são determinadas usando limites
- A velocidade média de um corpo caindo é diferente de sua velocidade instantânea;

Exemplo 2

- Uma maça cai de uma macieira e s(t) = 5t². Qual a velocidade média da maça no instante t = 1s?

$$V_m(1) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(1) - s(0)}{1 - 0}$$

$$V_m(1) = \frac{5.1^2 - 5.0^2}{1 - 0} = 5m/s$$



E a velocidade instantânea?

$$V_i(1) = \frac{s(1) - s(0,9)}{1 - 0,9} = \frac{5.1^2 - 5.(0,9)^2}{0,1}$$

$$V_i(1) = 9,4999m/s$$

Noção de limite

- O limite determina o comportamento de uma função quando o seu argumento fica cada vez mais próximo de determinado valor;
- Nesse processo, o argumento nunca é igual ao valor do qual se aproxima. A expressão $x \to a$ significa que "x" é cada vez mais próximo de "a", sem, no entanto, se igualar a esse valor;
- O limite pode variar se nos aproximarmos de a pela esquerda (valores menores do que "a") ou pela direita (valores maiores do que "a")

Exemplo 3

- Determinar o limite $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$ quando $x \to 1$.

  Observe que x = 1 não pertence ao domínio da função. Para resolvermos usaremos a princípio a força bruta.

x	f(x)
0	3
0,5	4
0,9	
0,999	
0,999999	

x	f(x)
2	7
1,5	6
1,1	
1,001	
1,000001	

- Se $x \neq 1$ podemos escrever a f(x) usando outra expressão algébrica? Qual?
- O gráfico de uma função pode ajudar na determinação de um limite?
- Qual o gráfico da função $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

Notação

- Para representar limites usamos a seguinte notação:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Dizemos, " o limite de f(x), quando x tende a a é igual a L", se pudermos tornar os valores de f(x) arbitrariamente próximos de "L"(tão próximos de "L" quanto quisermos), tomando "x" suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a .

- Tornar f(x) próximos de “L” é diminuir a distância entre f(x) e “L”, isto é diminuir o valor de | f(x) – L |;

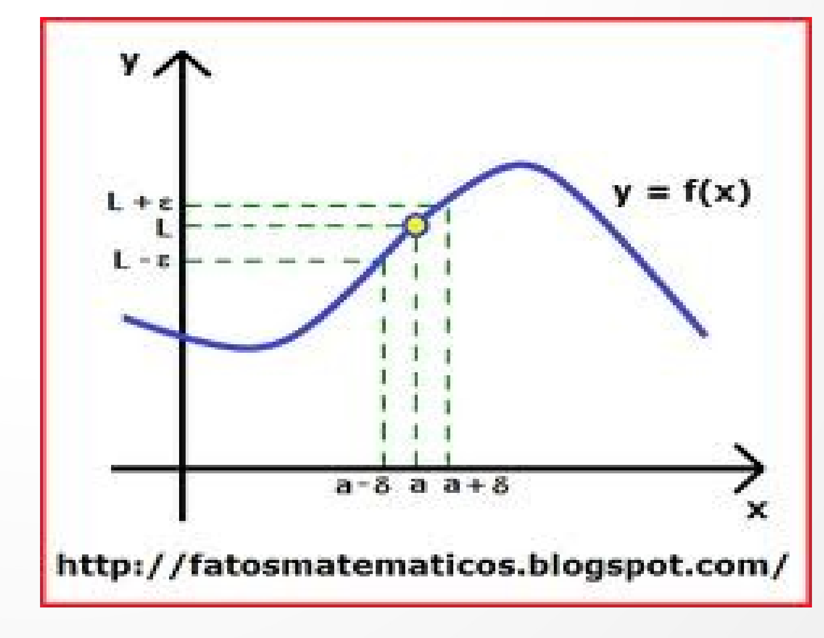
- Poder tomar os valores f(x) arbitrariamente próximos de “L” quer dizer que não importa a distância que impusermos entre f(x) e “L”, sempre poderemos escolher um valor de “x” próximos de a (mas que não é igual a a) tal que f(x) esteja mais próximos ainda de “L”;

- Em outra palavras: Se escolhermos | f(x) – L | < ε sempre existe δ tal que | x – a | < δ

- Para a função $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$

  se desejarmos que | f(x) – 5 | < 0,2, basta que “x” seja tal que |x – 1 | < 0,1;
- Se queremos que | f(x) – 5 | < 0,02, então basta que | x – 1 | < 0,01;
- Ou seja, se | f(x) – 5 | < ε , podemos atribuir qualquer valor para ε que haverá sempre um δ tal que, se | x – 1 | < δ , então a primeira desigualdade é satisfeita;

- De maneira geral, podemos sempre afirmar que dado um número $\varepsilon > 0$ tal que se $| f(x) – 5 | < \varepsilon$, então sempre existe um número δ tal que $| x – 1 | < \delta$
- Podemos agora definir formalmente o limite de uma função;



Definição

- Seja $V \in \mathbb{R}$ e $f : V \to \mathbb{R}$.Dizemos que o limite de f(x) quando x tende a a será L, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

se para todo $\varepsilon > 0$ há um número correspondente $\delta > 0$ tal que | f(x) – L | < ε , sempre que 0 < | x – a | < δ

- De outra forma:

Se 0 < | x – a | < δ , então | f(x) – L | < ε .

Exemplo 4

- Provar $\lim_{x \to 5} 4x - 5 = 15$
- Queremos determinar números reais positivos, e tais que 0 < | x – 5 | < δ , então | f(x) – 15 | < ε

| f(x) – 15 | = | 4x – 5 – 15 | = 4| x – 5 |;

Logo, se | f(x) – 15 | < ε , então | x – 5 | < $\frac{\varepsilon}{4}$

Desta forma, para todo valor de ε dado, basta escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ que a definição esta satisfeita.

Provamos assim que $\lim_{x \to 5} 4x - 5 = 15$

Um pouco de história

- Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), engenheiro militar e professor de matemática em Paris, definiu:“Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável aproximam-se indefinidamente de um valor fixo de forma que no final diferem dele por tão pouco quanto se queira, esse último é chamado limite de todos os outros”;

Frequentemente Cauchy iniciava suas demonstrações com a frase: “ Designando por δ e ε dois números muito pequenos...”;

Karl Weierstrass (1815-1897) estabeleceu a definição que vimos há pouco.

Propriedades ou técnicas para determinação de limites

- 1 – $\lim_{x \to a}(mx + b) = ma + b$, em que m e b são constantes quaisquer;
- Casos particulares:
- $\lim_{x \to a} b = b$
- $\lim_{x \to a} x = a$
- Exemplo: $\lim_{x \to 1}(4x - 3) = 4.1 - 3 = 1$

Se L, M, a e k são números reais e

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então

- 2 – Regra da soma: $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = L + M$
- 3 – Regra da diferença: $\lim_{x \to a}(f(x) - g(x)) = L - M$
- 4 – Regra da multiplicação por constante:

$$\lim_{x \to a}(k.f(x)) = k.L$$

- 5 – Regra do produto: $\lim_{x \to a}(f(x).g(x)) = L.M$
- 6 – Regra do Quociente: $\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$
- 7 – Regra da potenciação: $\lim_{x \to a}\left[f(x)\right]^n = L^n$, n é um número inteiro positivo
- 8 – Regra da raiz: $\lim_{x \to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{\frac{1}{n}}$, n é um número inteiro positivo

Exemplos 5

$$a)\ \lim_{x \to 2} 4x^2 - 3x + 2 =$$

$$b)\ \lim_{x \to 3} \sqrt{x^2 - 1} =$$

$$c)\ \lim_{x \to 0} \sqrt{\frac{4x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}} =$$

$$d)\ \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - x} =$$

$$e)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 100} - 10}{x^2} =$$

Exemplo 6

- Seja $f(x) = \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$,

a) Ache $\lim_{x \to 9} f(x)$

b) Esboce o gráfico de f e ilustre graficamente o limite do item a)

Exemplo 7

- Dadas as funções f(x), g(x) e h(x), determine o limite quando x se aproxima de 1 e as ilustre graficamente.

$$f(x) = x + 2$$

$$g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

Teorema do Confronto ou Teorema do Sanduíche

- Suponha que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo a, exceto, possivelmente, no próprio x = a. Suponha também que

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

Então, $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Exemplo 8

- Use o teorema anterior para provar que

$$\lim_{x \to 0}\left(x^2 sen\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

